

О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами

Э. Э. Гасанов*

Рассматриваются одномерные клеточные автоматы с локаторами, у которых полугруппа, заданная на алфавите вещания, является идемпотентным моноидом. Ранее было показано, что такие сложные задачи для клеточных автоматов как задача синхронизации стрелков или задача управления движением точки на прямой в идемпотентных клеточных автоматах с локаторами решаются совсем просто и задачи фактически вырождаются. В данной работе показано, что для задач, где надо сравнивать расстояния, идемпотентные клеточные автоматы с локаторами не дают преимуществ по порядку по сравнению с обычными клеточными автоматами. Тогда как использование неидемпотентных клеточных автоматов дает принципиальный выигрыш по времени.

Ключевые слова: идемпотентные клеточные автоматы с локаторами, сравнение и сложение целых чисел.

1. Введение

Понятие клеточного автомата было введено Дж. фон Нейманом [1–3] для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. Эта модель развивалась и использовалась в работах А. Беркса [4], Э. Мура [5], В. Б. Кудрявцева, А. С. Подколзина, А. А. Болотова [6] и других исследователей [7, 8].

Клеточный автомат — это математический объект с дискретными пространством и временем. Пространство поделено на клетки, в каждой из которых находится элементарный автомат. Такты времени задаются натуральными числами. Состояние автомата каждой пространственной клетки определяется очень простыми правилами взаимодействия, которые предписывают изменения состояния автомата каждой клетки в следующем такте времени в ответ на текущее состояние автоматов соседних клеток.

*Гасанов Эльяр Эльдарович — д.ф.-м.н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

В работе Э. Э. Гасанова [9] было введено понятие клеточного автомата с локаторами, которое отличается от понятия обычного клеточного автомата тем, что допускает передачу информации не только между соседними ячейками, но и на любое расстояние посредством передачи сигналов из алфавита вещания в эфир.

В данной работе рассматриваются одномерные клеточные автоматы с локаторами, у которых полугруппа, заданная на алфавите вещания, является идемпотентным моноидом. В работе [9] показано, что такие сложные задачи для клеточных автоматов как задача синхронизации стрелков [10] или задача управления движением точки на прямой [11] в идемпотентных клеточных автоматах с локаторами решаются совсем просто и задачи фактически вырождаются. В данной работе показано, что для задач, где надо сравнивать расстояния, идемпотентные клеточные автоматы с локаторами не дают преимуществ по порядку по сравнению с обычными клеточными автоматами и время решения задачи линейно зависит от расстояния. Хотя, как показано в работе [12], использование неидемпотентных клеточных автоматов дает принципиальный выигрыш, и время решения пропорционально логарифму от расстояния.

В настоящей работе рассматривается следующая задача. На прямой заданы 2 числа, одно из которых положительное, а второе отрицательное. Надо понять какое из них меньшее по модулю. Эта задача перекликается с одномерной задачей поиска ближайшего соседа, рассмотренной в работах [12, 13]. В этих работах показано, что эту задачу с помощью клеточного автомата с локаторами можно решить за время, равное по порядку логарифму от расстояния до ближайшей точки, причем в работе [12] получена верхняя оценка, а в работе [13] — нижняя. При этом при получении верхней оценки по существу используется сложение по модулю 2 по одной из компонент алфавита вещания, т.е. полугруппа, заданная на алфавите вещания, не является идемпотентным моноидом.

В данной работе показано, что задача сравнения по модулю целых чисел не может быть решена быстрее чем за время, пропорциональное расстоянию до ближайшей точки, что равно по порядку времени решения этой задачи обычным клеточным автоматом. Полученная линейная нижняя оценка автоматически дает линейную нижнюю оценку и для одномерной задачи поиска ближайшего соседа, и для задачи сложения целых чисел.

Автор выражает благодарность Г.В.Калачеву за ценные замечания и советы.

2. Постановка задачи и формулировка результатов.

Как уже было сказано, в [9] было введено понятие клеточного автомата с локаторами. В работе Г. В. Калачева [14] были выявлены некоторые неточности приведенного в [9] определения. Наиболее точное определение клеточного автомата с локаторами дано в работах [15, 16].

В настоящей работе мы не будем приводить общее понятие клеточного автомата с локаторами, а определим только его сужение на одномерный случай, приведенное в работе [13].

В определении клеточного автомата с локаторами используется понятие рационального телесного угла, но в одномерном случае имеются только 3 рациональных телесных угла, которые мы обозначим $\nu_{-1} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\nu_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\nu_\Omega = \nu_{-1} \cup \nu_1$. Телесный угол ν_Ω называется *полным*.

Одномерным клеточным автоматом с локаторами (КАсЛ) называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}, Q, V, G, +, \mathcal{L}, \varphi, \psi)$, где $\mathbb{Z}$ — множество одномерных векторов с целыми координатами; Q — некоторое конечное множество, называемое *множеством состояний*; в множестве Q выделено одно состояние q_0 , называемое *состоянием покоя*; $V = \{-1, 1\}$ — множество из двух векторов из $\mathbb{Z}$; $(G, +)$ — конечная коммутативная полугруппа с нейтральным элементом e и с коммутативной полугрупповой операцией $+$; $\mathcal{L} = \{\nu_{-1}, \nu_1\}$ — множество из описанных выше рациональных телесных углов в $\mathbb{R}$; φ — функция, зависящая от переменных $x_{-1}, x_0, x_1, z_{-1}, z_1, z_\Omega$; $\varphi : Q^3 \times G^2 \rightarrow Q$, $\varphi(\mathbf{q}_0, \mathbf{e}) = q_0$; $\mathbf{q}_0 = (q_0, q_0, q_0) \in Q^3$, $\mathbf{e} = (e, e) \in G^2$; ψ — функция, зависящая от переменных $x_{-1}, x_0, x_1, z_{-1}, z_1, z_\Omega$; $\psi : Q^3 \times G^2 \rightarrow G$; $\psi(\mathbf{q}_0, \mu) = e$, $\mu \in G^2$. Элементы множества $\mathbb{Z}$ называются *ячейками* клеточного автомата σ , элементы множества Q — *состояниями ячейки* клеточного автомата σ . Множество V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ и состоит из двух соседей — ближайшего соседа слева и ближайшего соседа справа. Множество G называется *алфавитом вещания*, а его элементы называются *сигналами вещания*. Множество $\mathcal{L}$ называется *шаблоном локаторов* клеточного автомата σ и состоит из двух локаторов — смотрящего влево и смотрящего вправо. Функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ , функция ψ — *функцией вещания* автомата σ . Переменные x_{-1}, x_0, x_1 принимают значения из Q , переменные z_{-1}, z_1, z_Ω — из G . Состояние q_0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(\mathbf{q}_0, \mathbf{e}) = q_0$ — как *условие сохранения состояния покоя*. Ячейки, находящиеся в состоянии, отличном от q_0 , будем называть *активными*. Условие $\psi(\mathbf{q}_0, \mu) = e$ означает, что ячейка в состоянии покоя, не имеющая

активных соседей, посылает в эфир нейтральный элемент, что можно интерпретировать как то, что она не посылает сигналы в эфир.

Если $a \in \mathbb{Z}$, ν — телесный угол из $\mathcal{L}$, то через $\nu(a)$ обозначим телесный угол, полученный параллельным переносом угла ν в точку a , т.е. $\nu_{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $\nu_1(a) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $\nu_\Omega(a) = \nu_{-1}(a) \cup \nu_1(a)$.

Если $a \in \mathbb{Z}$ — ячейка клеточного автомата σ , то множество $V(a) = \{a - 1, a, a + 1\}$ называется *окрестностью ячейки a* , а множество $\mathcal{L}(a) = \bigcup_{\nu \in \mathcal{L}} \nu(a)$ — *множеством локаторов ячейки a* .

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовем пару (g, f) , где g — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}$, принимающая значения из G и называемая *состоянием эфира*, f — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}$, принимающая значения из Q и называемая *распределением состояний клеточного автомата с локаторами σ* . Такую функцию можно интерпретировать как некую мозаику, возникающую в одномерном пространстве в результате приписывания каждой точке с целочисленными координатами некоторого сигнала из множества G и некоторого состояния из множества Q . Множество всевозможных состояний клеточного автомата с локаторами обозначим Σ .

Если $a \in \mathbb{Z}$, (g, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ , то значение $g(a)$ называем *сигналом ячейки a , определяемым состоянием (g, f)* , а значение $f(a)$ — *состоянием ячейки a , определяемым состоянием (g, f)* . Значения

$$\phi_{-1}^g(a) = \sum_{b \in \nu_{-1}(a) \cap \mathbb{Z}} g(b), \quad \phi_1^g(a) = \sum_{b \in \nu_1(a) \cap \mathbb{Z}} g(b) \quad (1)$$

называем *значениями локаторов ν_{-1} и ν_1 ячейки a , определяемыми состоянием (g, f)* . Здесь суммирование сигналов осуществляется с помощью определяющей операции $+$ полугруппы G . Отметим, что в формулах (1) используются формально бесконечные суммы, и, чтобы они были определены, мы либо будем считать, что только конечное число слагаемых в суммах отлично от нейтрального элемента, либо предположим, что полугруппа $(G, +)$ является *идемпотентным моноидом*, т.е. для любого $h \in G$ выполнено $h + h = h$.

Отметим также, что если в шаблоне локаторов $\mathcal{L}$ есть локатор, соответствующий полному телесному углу, то его значение равно

$$\phi_\Omega^g(a) = \sum_{b \in \nu_\Omega(a) \cap \mathbb{Z}} g(b) = \phi_{-1}^g(a) + \phi_1^g(a),$$

т.е. его значение полностью определяется значениями локаторов ν_{-1} и ν_1 , поэтому полный локатор является избыточным в одномерном случае.

На множестве Σ определим *глобальную функцию переходов* Φ_σ клеточного автомата с локаторами σ , полагая $\Phi_\sigma(g, f) = (g', f')$, где $(g, f), (g', f') \in \Sigma$ и для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполняются тождества

$$g'(a) = \psi(f(a-1), f(a), f(a+1), \phi_{-1}^g(a), \phi_1^g(a)), \quad (2)$$

$$f'(a) = \varphi(f(a-1), f(a), f(a+1), \phi_{-1}^g(a), \phi_1^g(a)). \quad (3)$$

Содержательная интерпретация отображения Φ_σ такова, что сигнал каждой ячейки и состояние каждой ячейки “после перехода” определяются по состоянию окрестности ячейки и по значениям локаторов “до перехода” с помощью законов ψ и φ одинаково для всех ячеек.

Поведениями клеточного автомата с локаторами σ называем такие последовательности $(g_0, f_0), (g_1, f_1), (g_2, f_2), \dots$ его состояний, для которых выполняется $(g_{i+1}, f_{i+1}) = \Phi_\sigma(g_i, f_i)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, причем (g_i, f_i) называется *состоянием клеточного автомата с локаторами σ в момент i* , а (g_0, f_0) — *начальным состоянием клеточного автомата с локаторами σ* .

Для одномерных КА с локаторами состояние удобно записывать в виде слова, бесконечного в оба конца. При этом, чтобы сохранять привязку, удобно в этом слове отметить фиксированную позицию (не обязательно начало координат). Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — обозначение для сверхслова α в обычной записи слева направо, когда хочется подчеркнуть направление записи, $\tilde{\alpha} = (\dots, \alpha_2, \alpha_1)$ — симметричное обозначение для сверхслова α , записанное справа налево. Введём обозначение $(\tilde{\alpha} \mid_i \vec{\beta})$, где $\alpha, \beta \in (G \times Q)^\infty, i \in \mathbb{Z}$.

$$(\tilde{\alpha} \mid_i \vec{\beta}) := (g, f) \in \Sigma, \quad (4)$$

где $(g(i+k-1), f(i+k-1)) = \beta_k, (g(i-k), f(i-k)) = \alpha_k, k \in \mathbb{N}$.

Пусть $q \in Q, e \in G$ — нейтральный элемент полугруппы G , тогда обозначим $\dot{q} = (e, q)$.

Сформулируем задачу сравнения по модулю целых чисел $S(l, r), l, r \in \mathbb{N}$. Пусть на $\mathbb{Z}$ задано начальное состояние $I_0(l, r) = (g_0, f_0)$ клеточного автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) ячейке с координатой 0 присвоено состояние C , т.е. $f_0(0) = C$;
- 2) ячейке с координатой $-l$ присвоено состояние L , т.е. $f_0(-l) = L$;
- 3) ячейке с координатой r присвоено состояние R , т.е. $f_0(r) = R$;
- 4) остальным ячейкам присвоено состояние q_0 , являющееся состоянием покоя;

5) все ячейки не посылают в эфир сигналы, т.е. для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_0(a) = e$.

В нотации (4)

$$I_0(l, r) = \left(\dot{q}_0^\infty \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \left|_1 \dot{q}_0^{r-1} \dot{R} \dot{q}_0^\infty \right. \right). \quad (5)$$

Решением задачи сравнения по модулю целых чисел $S(l, r)$, соответствующей начальному состоянию $I_0(l, r)$, назовем состояние $I_F(l, r) = (g_F, f_F)$ автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $l < r$, то ячейкам из отрезка $[-l, 0]$ присваиваются значения L_F , т.е. для любой ячейки $a \in [-l, 0]$ выполнено $f_F(a) = L_F$;

2) если $l \geq r$, то ячейкам из отрезка $[0, r]$ присваиваются значения R_F , т.е. для любой ячейки $a \in [0, r]$ выполнено $f_F(a) = R_F$;

3) остальные ячейки находятся в состоянии покоя q_0 ;

4) все ячейки не посылают в эфир сигналы, т.е. для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_F(a) = e$.

В нотации (4) если $l < r$, то

$$I_F(l, r) = \left(\dot{q}_0^\infty \dot{L}_F^{l+1} \left|_1 \dot{q}_0^\infty \right. \right), \quad (6)$$

если $l \geq r$, то

$$I_F(l, r) = \left(\dot{q}_0^\infty \left|_0 \dot{R}_F^{r+1} \dot{q}_0^\infty \right. \right). \quad (7)$$

Скажем, что клеточный автомат с локаторами σ *решает задачу сравнения по модулю целых чисел*, если для любых натуральных чисел l, r из начального состояния $I_0(l, r)$, соответствующего задаче $S(l, r)$ и задаваемого выражением (5), он переходит в финальное состояние $I_F(l, r)$, описываемое выражениями (6–7), после достижения финального состояния оно больше не меняется, и ни одно промежуточное состояние не содержит ячеек в состояниях L_F и R_F .

Пусть $l, r \in \mathbb{N}$. Обозначим через $T(\sigma, l, r)$ — время, за которое произвольный клеточный автомат с локаторами σ решает задачу сравнения по модулю целых чисел $S(l, r)$, (положим $T(\sigma, l, r) = \infty$, если автомат σ не решает задачу $S(l, r)$).

Назовем клеточный автомат с локаторами *идемпотентным*, если полугруппа его алфавита вещания является идемпотентным моноидом.

Следующая лемма является аналогом леммы о накачке, которая говорит, что можно сколь угодно накручивать периодическую часть без качественного изменения результата.

Лемма 1 (о накачке). Пусть $\sigma = (\mathbb{Z}, Q, V, G, +, L, \varphi, \psi)$ — одномерный идемпотентный КАсЛ. Для любых $\alpha, \beta \in (G \times Q)^\infty$, $\gamma \in (G \times Q)^+$, $t \in \mathbb{N}$

существуют такие $\alpha', \beta' \in (G \times Q)^\infty$, $\gamma' \in (G \times Q)^{| \gamma |}$, что для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\Phi_\sigma^t \left(\tilde{\alpha} \gamma^t \mid_i \gamma^k \gamma^t \vec{\beta} \right) = \left(\tilde{\alpha}' \mid_i \gamma'^k \vec{\beta}' \right).$$

Теорема 1. Если $l, r \in \mathbb{N}$, то для любого одномерного идемпотентного клеточного автомата с локаторами σ выполнено $T(\sigma, l, r) \geq \frac{\min(l, r)}{2}$.

Теорема 2. Существует одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами σ , такой, что он решает задачу сравнения по модулю целых чисел и для любых натуральных чисел l, r выполнено $T(\sigma, l, r) = \lfloor \frac{\min(l, r) - 1}{2} \rfloor + 2 = \lceil \frac{\min(l, r)}{2} \rceil + 1$.

Здесь $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$ — целая часть от деления a на 2, $\lceil \frac{a}{2} \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее $a/2$.

3. Доказательство леммы о накачке

Сначала докажем утверждение леммы для случая $t = 1$, т.е. докажем равенство

$$\Phi_\sigma \left(\tilde{\alpha} \gamma \mid_i \gamma^k \gamma \vec{\beta} \right) = \left(\tilde{\alpha}' \mid_i \gamma'^k \vec{\beta}' \right). \quad (8)$$

Обозначим исходное состояние $(g, f) = \left(\tilde{\alpha} \gamma \mid_i \gamma^k \gamma \vec{\beta} \right)$.

Это состояние состоит из левого хвоста $\tilde{\alpha} \gamma$, правого хвоста $\gamma \vec{\beta}$ и периодической части γ^k (если $k > 0$).

Обозначим через $T = |\gamma|$ — длину периода слова γ^k . Поскольку $\gamma \in (G \times Q)^+$, то $T > 0$.

Если $a = (r, q) \in G \times Q$, то обозначим $s(a) = q$, $w(a) = r$. Если $\alpha \in (G \times Q)^*$ или $\alpha \in (G \times Q)^\infty$, т.е. α — слово или сверхслово, то обозначим $w(\alpha) = \sum_{a \in \alpha} w(a)$. Обозначим $B = w(\gamma) = \sum_{p=1}^T w(\gamma_p)$. Сигнал B — это суммарный сигнал слова γ .

Рассмотрим случай, когда $k = 0$.

Пусть

$$\Phi_\sigma \left(\tilde{\alpha} \gamma \mid_i \gamma \vec{\beta} \right) = \left(\tilde{\alpha}' \mid_i \vec{\beta}' \right). \quad (9)$$

для некоторых α' и β' , которые назовем соответственно левым и правым хвостами результата.

Сначала покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\Phi_\sigma \left(\tilde{\alpha} \gamma \mid_i \gamma^k \gamma \vec{\beta} \right) = \left(\tilde{\alpha}' \mid_i \gamma''^k \vec{\beta}' \right), \quad (10)$$

где $|\gamma_k''| = kT$, а α' и β' те же самые, что и в равенстве (9).

Обозначим $(g', f') = (\tilde{\alpha}\gamma \mid_i \gamma\vec{\beta})$.

Рассмотрим левый хвост. Согласно формулам (2) и (3) значения функций перехода и вещания определяются состояниями соседей и значениями левого и правого локаторов.

Рассмотрим произвольную ячейку j из левого хвоста, т.е. $j < i$. По определению для любого $n < i$ выполняется $f(n) = f'(n)$. Для ячейки $i - 1$ правым соседом является ячейка i , но $f(i) = f'(i) = s(\gamma_0)$. Таким образом состояния ячеек, по которым определяются значения функций переходов и вещания для левого хвоста полностью одинаковые.

Значение левого локатора ячейки j определяется значениями сигналов, передаваемых ячейками, находящимися слева от j , и равно

$$\phi_{-1}^g(j) = \sum_{p=-\infty}^{j-1} g(p) = \sum_{p=-\infty}^{j-1} g'(p) = \phi_{-1}^{g'}(j),$$

т.е. значения левого локатора одинаковые для g и g' .

Для значения правого локатора ячейки j имеем

$$\begin{aligned} \phi_1^g(j) &= \sum_{p=j+1}^{\infty} g(p) = \sum_{p=j+1}^{i-1} g(p) + B + kB + w(\beta) = \\ &= \sum_{p=j+1}^{i-1} g'(p) + B + w(\beta) = \phi_1^{g'}(j). \end{aligned}$$

Иными словами сумма, определяющая значение правого локатора для g , отличается от суммы для g' на слагаемое kB , но поскольку в сумме уже есть слагаемое B , то в силу идемпотентности полугруппы G добавление слагаемого kB значения суммы не меняет.

Полностью аналогичные рассуждения проходят и для правого хвоста.

Иллюстрацию этих рассуждений можно найти на рисунке 1.

Тем самым значения хвостов не зависят от k и равны всегда α' и β' .

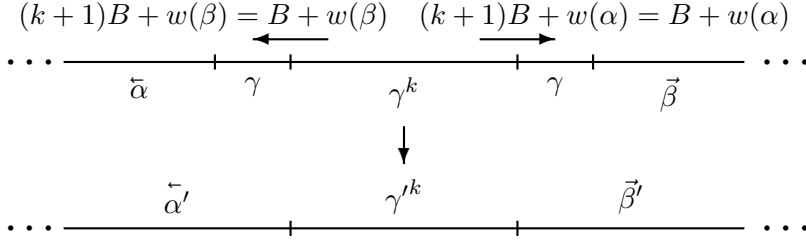
Остается доказать периодичность с периодом T слова γ_k'' из равенства (10).

Пусть $k = 1$ и $\Phi_{\sigma}(\tilde{\alpha}\gamma \mid_i \gamma\gamma\vec{\beta}) = (\tilde{\alpha}' \mid_i \gamma'\vec{\beta}')$.

Покажем, что для любого $k > 1$ справедливо $\gamma_k'' = \gamma'^k$.

Обозначим $(g'', f'') = (\tilde{\alpha}\gamma \mid_i \gamma\gamma\vec{\beta})$.

Рассмотрим произвольную ячейку $j \in [i, i + kT - 1]$. Пусть $a = \lfloor \frac{j-i}{T} \rfloor$ — целая часть от деления $j - i$ на T , $b = (j - i) \bmod T$ — остаток от деления $j - i$ на T , т.е. $j = i + aT + b$.

Рис. 1: Преобразование хвостов не зависит от k .

Понятно, что $f(j-1) = f''(b-1)$, $f(j) = f''(b)$ и $f(j+1) = f''(b+1)$, т.е. окрестность ячейки b для f'' и окрестность ячейки j для f совпадают. Посмотрим на значения правого и левого локаторов ячейки j .

$$\begin{aligned} \phi_{-1}^g(j) &= \sum_{p=-\infty}^{j-1} g(p) = w(\alpha) + B + aB + \sum_{p=1}^b w(\gamma_p) = \\ &= w(\alpha) + B + \sum_{p=1}^b w(\gamma_p) = \sum_{p=-\infty}^{b-1} g''(p) = \phi_{-1}^{g''}(b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1^g(j) &= \sum_{p=j+1}^{\infty} g(p) = \sum_{p=b+1}^T w(\gamma_p) + (k-1-a)B + B + w(\beta) = \\ &= \sum_{p=b+1}^T w(\gamma_p) + B + w(\beta) = \phi_1^{g''}(b). \end{aligned}$$

Иными словами сумма, определяющая значение как левого, так и правого локатора ячейки j для g , отличается от суммы ячейки b для g'' на слагаемое кратное B , но поскольку в сумме уже есть слагаемое B , то в силу идемпотентности полугруппы G добавление слагаемого кратного B значения суммы не меняет.

Тем самым значения состояний окрестности и значения левого и правого локаторов ячейки j для g совпадают с соответствующими значениями ячейки b для g'' , откуда сразу следует, что $\gamma_k'' = \gamma^k$. Иллюстрацию этих рассуждений можно найти на рисунке 2.

Равенство (8) полностью доказано.

Чтобы доказать утверждение леммы для случая $t > 1$ достаточно применить равенство (8) t раз. Лемма доказана.

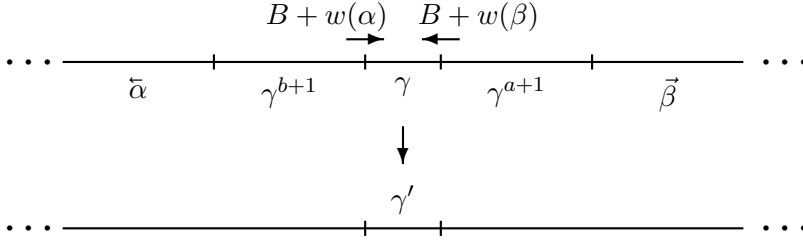


Рис. 2: Преобразование периодической части не зависит от a и b , поскольку $w(\gamma^{a+1}) = (a+1)B = B$ при $a > 0$.

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 является творческим переизложением нижней оценки из работы [13] на случай идемпотентного моноида.

Пусть КАсЛ σ решает задачу $S(l, r)$ за время t .

Рассмотрим случай $l < r$. Допустим, $2t \leq l - 1$. Тогда $2t < r - 1$, т.е. $r - 1 - 2t \geq 1$.

Поскольку σ решает задачу $S(l, r)$ за время t , то

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}^t(I_0(l, r)) &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \Big|_1 \dot{q}_0^{r-1} \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right) = \\ &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \Big|_1 \dot{q}_0^t \dot{q}_0^{r-1-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right) = \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L}_F^{l+1} \Big|_1 \dot{q}_0^{\infty} \right). \end{aligned}$$

Тогда по лемме 1 выполнено

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}^t(I_0(l, l)) &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \Big|_1 \dot{q}_0^t \dot{q}_0^{l-1-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right) = \\ &= \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L}_F^{l+1} \Big|_1 \dot{q}_0^{\infty} \right). \end{aligned}$$

Но это противоречит тому, что σ решает задачу $S(l, l)$, поскольку $I_F(l, l) = \left(\dot{q}_0^{\infty} \Big|_0 \dot{R}_F^{l+1} \dot{q}_0^{\infty} \right)$. Отсюда $2t \geq l$.

Аналогично рассмотрим случай $l \geq r$. Допустим, $2t \leq r - 1$, т.е. $r - 1 - 2t \geq 0$.

Поскольку σ решает задачу $S(l, r)$ за время t , то

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma}^t(I_0(l, r)) &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \left|_1 \dot{q}_0^{r-1} \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \\ &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \left|_1 \dot{q}_0^t \dot{q}_0^{r-1-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \\ &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \dot{q}_0^t \left|_{t+1} \dot{q}_0^{r-1-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \\ &= \left(\dot{q}_0^{\infty} \left|_0 \dot{R}_F^{r+1} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{R}_F^{t+1} \left|_{t+1} \dot{R}_F^{r-1-2t} \dot{R}_F^{t+1} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right).\end{aligned}$$

Тогда по лемме 1 выполнено

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma}^t(I_0(l, l+1)) &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \left|_1 \dot{q}_0^t \dot{q}_0^{l-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \\ &= \Phi_{\sigma}^t \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L} \dot{q}_0^{l-1} \dot{C} \dot{q}_0^t \left|_{t+1} \dot{q}_0^{l-2t} \dot{q}_0^t \dot{R} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right) = \\ &= \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{R}_F^{t+1} \left|_{t+1} x^{l-2t} \dot{R}_F^{t+1} \dot{q}_0^{\infty} \right. \right).\end{aligned}$$

для некоторого $x \in G \times Q$, причем если $r - 1 - 2t > 0$, то $x = \dot{R}_F$.

Но это противоречит тому, что σ решает задачу $S(l, l+1)$, поскольку состояние R_F не должно появляться до финального состояния $I_F(l, l+1) = \left(\dot{q}_0^{\infty} \dot{L}_F^{l+1} \left|_1 \dot{q}_0^{\infty} \right. \right)$. Отсюда $2t \geq r$.

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Дадим неформальное описание идемпотентного клеточного автомата с локаторами, который будет решать задачу сравнения по модулю целых чисел.

Пусть l, r — натуральные числа. Ячейку с координатой 0 назовем *центральной*, и она в начальный момент будет находиться в состоянии C . Ячейку с координатой $-l$ назовем *левой*, и она в начальный момент будет находиться в состоянии L . Ячейку с координатой r назовем *правой*, и она в начальный момент будет находиться в состоянии R . Остальные ячейки в начальный момент находятся в состоянии покоя q_0 .

Алфавит состояний $Q = \{q_0, L, L_1, L_2, L_R, C, R, R_1, R_2, R_L, L_F, R_F\}$, q_0 — состояние покоя, алфавит вещания $G = \{0, 1, 2\}^2$, полугрупповая операция — по-компонентный максимум, $e = (0, 0)$ — нейтральный элемент полугруппы G , хоть шаблон локаторов стандартный $\mathcal{L} = \{\nu_{-1}, \nu_1\}$, но для упрощения изложения будем считать, что шаблон локаторов содержит только один полный локатор ν_{Ω} , просто его значения будут получаться суммированием значений локаторов ν_{-1}, ν_1 .

От центральной ячейки C вправо отправляется сигнал R_L , влево — L_R , от L вправо отправляется волна из ячеек L , от R влево — волна из ячеек R . Причем по мере распространения волн ячейки, находящиеся в состояниях L , R , L_R и R_L , в этих состояниях и остаются. В момент, когда волна L встречается с волной L_R (ячейка L_R или C справа от L), то ячейка в состоянии L , столкнувшись с L_R , отправляет в эфир сигнал $(2, 0)$ и переходит в состояние L_2 ; если эти волны встречаются не вплотную (ячейка L слева, а L_R или C справа от q_0), то эта ячейка в состоянии q_0 отправляет в эфир сигнал $(1, 0)$ и переходит в L_1 . Аналогично, в момент, когда волна R встречается с волной R_L (ячейка R_L или C слева от R), ячейка в состоянии R , столкнувшись с R_L , отправляет в эфир сигнал $(0, 2)$ и переходит в состояние R_2 ; если эти волны встречаются не вплотную (ячейка R справа, а R_L или C слева от q_0), то эта ячейка в состоянии q_0 отправляет в эфир сигнал $(0, 1)$ и переходит в R_1 . Во всех остальных случаях ячейки молчат.

Таким образом, первый ненулевой сигнал в эфире появляется, когда либо слева, либо справа происходит столкновение волн. Все ячейки слышат одинаковые сигналы из эфира, кроме ячеек, отправивших сигнал, но ячейки, отправившие сигнал, знают, что они отправили, из своих состояний. При этом $l < r$, только если в эфире появляются сигналы $(2, 0)$, $(1, 0)$ (столкновение произошло только слева) или $(2, 1)$ (столкновение волн произошло с двух сторон, но справа столкновение не вплотную). В остальных случаях при ненулевом сигнале в эфире $l \geq r$.

Как только в эфире появляется ненулевой сигнал, то если этот сигнал равен $(2, 0)$, $(1, 0)$ или $(2, 1)$, то все ячейки в состояниях R, R_L, R_1, R_2 переходят в состояние покоя q_0 , а ячейки в состояниях L, L_R, L_1, L_2, C — в состояние L_F . В остальных случаях при ненулевом сигнале в эфире все ячейки в состояниях L, L_R, L_1, L_2 переходят в состояние покоя q_0 , а ячейки в состояниях R, R_L, R_1, R_2, C — в состояние R_F . При ненулевом сигнале в эфире ячейки ничего в эфир не отправляют, и финальная конфигурация получается на следующем такте после появления в эфире ненулевого сигнала.

Оценим общее время алгоритма. На такте $\lfloor \frac{\min(l, r) - 1}{2} \rfloor$ происходит столкновение волн, и в эфир отправляется ненулевой сигнал, который ячейки слышат на следующем такте, после чего переходят в финальное состояние. Таким образом, финальное состояние получается через 2 такта после столкновения волн, в момент $\lfloor \frac{\min(l, r) - 1}{2} \rfloor + 2 = \lceil \frac{\min(l, r)}{2} \rceil + 1$.

Приведем формальное описание функций перехода и вещания.

Правила перехода (* обозначает любой символ, в скобках — пояснение, где конфигурация встречается):

1. Распространение волн:

- а) $\varphi(q_0, q_0, x, e) = x, x \in \{L_R, R\}$ (распространение волны влево);
- б) $\varphi(q_0, q_0, C, e) = L_R$ (запуск волны влево от центра);
- в) $\varphi(x, q_0, q_0, e) = x, x \in \{R_L, L\}$ (распространение волны вправо);
- г) $\varphi(C, q_0, q_0, e) = R_L$ (запуск волны вправо от центра);

2. Столкновение волн:

- а) $\varphi(L, q_0, x, e) = L_1, x \in \{C, L_R\}$ (чётное l);
- б) $\varphi(*, L, x, e) = L_2, x \in \{C, L_R\}$ (нечётное l);
- в) $\varphi(x, q_0, R, e) = R_1, x \in \{C, R_L\}$ (чётное r);
- г) $\varphi(x, R, *, e) = R_2, x \in \{C, R_L\}$ (нечётное r);

3. Сравнение и переход в финальное состояние:

- а) $\varphi(*, x, *, (a, b)) = L_F, a > b, x \in \{C, L, L_R\}$ (ячейки слева от центра при $l < r$);
- б) $\varphi(*, L_a, *, (*, b)) = L_F, a > b$ (ячейка, запустившая сигнал слева от центра при $l < r$);
- в) $\varphi(*, x, *, (a, b)) = R_F, a \leq b, b \neq 0, x \in \{C, R, R_L\}$ (ячейки справа от центра при $l \geq r$);
- г) $\varphi(*, R_b, *, (a, *)) = R_F, a \leq b$ (ячейка, запустившая сигнал справа от центра при $l \geq r$);

4. Оставшиеся случаи:

- а) $\varphi(*, x, *, e) = x, x \in \{L, R, L_R, R_L, C, L_F, R_F\}$ за исключением случаев 2 б) и 2 г) (сохранение состояний);
- б) Во всех остальных случаях $\varphi = q_0$.

Функция вещания определяется следующим образом:

$$\psi(x, y, z, g) = \begin{cases} (a, 0), & q' = L_a, a \in \{1, 2\}, \\ (0, b), & q' = R_b, b \in \{1, 2\}, \\ (0, 0) & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{где } q' = \varphi(x, y, z, g).$$

Идемпотентный клеточный автомат с локаторами, решающий задачу сравнения по модулю целых чисел полностью описан.

Теорема 2 доказана.

Легко построить обычный клеточный автомат, который будет решать задачу сравнения по модулю целых чисел $S(l, r)$ за время $O(l + r)$. Для

этого достаточно послать волны от левой и правой ячеек к центральной ячейке, и какая из волн придет к центральной ячейке быстрее, тот отрезок и короче, т.е. через $\min(l, r)$ тактов мы будем знать результат и нам остается построить финальную конфигурацию. Для этого мы посылаем от центральной ячейки к более далекому краю стирающую волну, а на более коротком отрезке можно запустить задачу синхронизации стрелков, чтобы состояния R_F (или L_F) появились одновременно. Это займет времени, равное 3 длинам отрезка. Но к тому времени дальний край еще может быть не стерт, поэтому лучше дойти до дальнего края, стереть его, вернуться к центральной ячейке и только после этого запустить решение задачи синхронизации стрелков. Например, если $l < r$, то суммарное время работы нашего клеточного автомата будет $l + 2r + 3l$.

Тем самым, если считать, что l и r имеют одинаковый порядок, то и клеточный автомат, и идемпотентный клеточный с локаторами будут решать задачу за линейное время, и тем самым идемпотентный клеточный с локаторами не имеет преимуществ по порядку по сравнению с обычным клеточным автоматом.

6. Перенос нижней оценки на другие задачи

Рассмотрим задачу, которую назовем модифицированной задачей сравнения по модулю целых чисел и обозначим $S_M(l, r)$. Начальная конфигурация в этой задаче такая же, что и в задаче сравнения по модулю целых чисел $S(l, r)$. Также считается, что в сигнале вещания имеется специальная компонента, которая отвечает за результат задачи. А именно, если по этой компоненте выдается 0, то решения еще нет, если по этой компоненте появилась 1, то решение получено и $l < r$, если по этой компоненте выдается 2, то решение получено и $l \geq r$. После получения решения состояния автомата не меняются и автомат молчит (выдает в эфир нейтральный сигнал).

Обозначим через $T_M(\sigma, l, r)$ — время, за которое произвольный клеточный автомат с локаторами σ решает модифицированную задачу сравнения по модулю целых чисел $S_M(l, r)$, (положим $T_M(\sigma, l, r) = \infty$, если автомат σ не решает задачу $S_M(l, r)$).

Утверждение 1. *Если $l, r \in \mathbb{N}$, то для любого одномерного идемпотентного клеточного автомата с локаторами σ выполнено $T_M(\sigma, l, r) \geq \frac{\min(l, r)}{2} - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную модифицированную задачу сравнения по модулю целых чисел $S_M(l, r)$.

Предположим, что некоторый одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами σ решает модифицированную задачу за время t и $t < \frac{s}{2} - 1$, где $s = \min(l, r)$. На базе этого автомата построим автомат σ' , который будет решать обычную задачу сравнения по модулю целых чисел за время меньшее чем $\frac{s}{2}$, что будет противоречить теореме 1, и докажет неверность предположения.

Автомат σ' будет надстройкой над автоматом σ . Сначала также, как это сделано в автомате, описанном в доказательстве теоремы 2, добавим к автомату σ компоненту вещания (и возможно добавим состояния для запоминания позиций левой, правой и центральной ячеек), с помощью которой разделим всю прямую на левый и правый хвосты и левый и правый отрезок. В момент, когда автомат σ сообщит о результате через компоненту результата сигнала вещания, мы используем этот результат, чтобы получить финальную конфигурацию задачи сравнения по модулю целых чисел. Таким образом автомат σ' выдаст финальную конфигурацию на такт позже сигнала результата автомата σ .

Утверждение 1 доказано. $\square$

Тем самым мы показали, что хоть мы в доказательстве теоремы 1 по существу опирались на особенности финальной конфигурации, а именно, что она представляет собой непрерывный отрезок активных клеток от центральной до ближайшей левой или правой ячеек, но оказывается это не имеет принципиального значения.

Рассмотрим задачу поиска ближайшего соседа описанную в работах [12, 13]. В этой задаче в начальной конфигурации на прямой разбросано некоторое количество точек. Надо найти точку ближайшую к началу координат.

Покажем, что эту задачу нельзя решить одномерным идемпотентным клеточным автоматом с локаторами за время, меньшее чем $\frac{s}{2} - 1$, где s — расстояние до ближайшего соседа. Если бы могли это сделать, то взяв в качестве начальной конфигурации конфигурацию, в которой только одна точка находится левее начала координат, и одна точка — правее начала координат, мы фактически получим начальную конфигурацию модифицированной задачи сравнения по модулю целых чисел. И решив, ее за время, меньшее чем $\frac{s}{2} - 1$, получим противоречие с утверждением 1.

Рассмотрим задачу сложения целых векторов, описанную в работе [15]. В этой задаче в начальной конфигурации отмечены 3 ячейки: ячейка с координатой 0 как начало координат, и две ячейки с координатами a и b интерпретируемые как слагаемые. В финальной конфигурации только 2 ячейки должны быть не в состоянии покоя: ячейка с координатой 0 в состоянии C_F и ячейка с координатой $a + b$ в состоянии R_F , причем

в промежуточных состояниях состояния C_F и R_F не появляются. В случае, если $a = -b$, считаем, что в финальной конфигурации ячейка с координатой 0 оказывается в состоянии C_{F0} , а остальные ячейки — в состоянии покоя.

Покажем, что эту задачу нельзя решить одномерным идемпотентным клеточным автоматом с локаторами за время меньшее, чем $\frac{s}{2} - 2$ тактов, где $s = \min(|a|, |b|)$. Если бы мы могли решать эту задачу за время $t < \frac{s}{2} - 2$, то мы могли бы решить модифицированную задачу сравнения по модулю целых чисел $S_M(l, r)$ следующим образом. Зададим начальную конфигурацию задачи сложения чисел так, что $a = -l$, а $b = r$. После этого решаем задачу сложения чисел за t тактов. В момент своего появления ячейка в состоянии C_F что-нибудь кричит в эфир, в зависимости от того в какой локатор ячейка в состоянии R_F слышит этот сигнал, она понимает с какой стороны от начала координат она находится, и на следующий такт выдает финальный сигнал 2, если она находится левее начала координат, и — сигнал 1, если — правее. Если $l = r$, то в момент появления состояния C_{F0} можно сразу подавать финальный сигнал 2. Получается, что мы решили задачу сравнения чисел за время $t + 1 < \frac{s}{2} - 1$, что противоречит утверждению 1.

Остается заметить, что каждую из задач из этого раздела можно решить обычным клеточным автоматом за линейное время (задачу поиска ближайшего соседа с некоторыми оговорками). И отсюда получаем, что для всех этих задач одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами не дает преимущества по порядку по сравнению с обычным клеточным автоматом.

Список литературы

- [1] фон Дж. Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, М, 1971.
- [2] von J. Neumann, *Collected Works*, New York, 1961–1963.
- [3] von J. Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.
- [4] A. Burks, *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.
- [5] Э. Ф. Мур, “Математические модели самовоспроизведения”, *Математические проблемы в биологии*, Мир, М, 1966.
- [6] В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов, *Основы теории однородных структур*, Наука, М, 1971, 296 с.

- [7] В. Б. Кудрявцев, Э. Э. Гасанов, А. С. Подколзин, *Теория интеллектуальных систем: в 4 т. Т. 4. Теория автоматов*, Издательский дом МГУ, М, 2026, 305 с.
- [8] Г. В. Калачев, Е. Е. Титова, “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22:3** (2018), 105–125.
- [9] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:2** (2020), 120–133.
- [10] F. R. Moore, G. G. Langdon, “A generalized firing squad problem”, *Information and Control*, **12:3** (1968), 212–220.
- [11] Е. Е. Титова, “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:1** (2014), 153–180.
- [12] Д. И. Васильев, “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:3** (2020), 99–119.
- [13] Д. И. Васильев, Э. Э. Гасанов, “Нижняя оценка сложности задачи поиска ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 2023, № 5, 33–39. doi: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-5-5.
- [14] Г. В. Калачев, “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:3** (2020), 47–56.
- [15] Д. Э. Ибрагимова, “Сложение векторов на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26:4** (2022), 134–162.
- [16] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып 21, ФИЗМАТЛИТ, М, 2023, 5–51. doi: 10.20948/mvk-2023-5.

On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators

E. E. Gasanov

We consider one-dimensional cellular automata with locators for which the semigroup defined on the broadcast alphabet is an idempotent monoid. It has previously been shown that complex cellular automata problems such as the firing squad synchronization problem or the problem of controlling the motion of a point on a line are solved quite simply in idempotent cellular automata with locators, and the problems essentially degenerate. In this paper, we show that for problems that require distance comparison, idempotent cellular automata with locators provide no asymptotic advantage over conventional cellular automata. However, the use of non-idempotent cellular automata provides a significant time advantage.

Keywords: Idempotent cellular automata with locators, comparison and addition of integers.

References

- [1] von J. Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, Mir, M, 1971 (in Russian).
- [2] von J. Neumann, *Collected Works*, New York, 1961–1963.
- [3] von J. Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.
- [4] A. Burks, *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.
- [5] E. F. Moore, “Mathematical models of self-reproduction”, *Mathematical problems in biology*, Mir, M, 1966 (in Russian).
- [6] V. B. Kudryavtsev, A. S. Podkolzin, A. A. Bolotov, *Fundamentals of the theory of homogeneous structures*, Nauka, M, 1971 (in Russian), 296 pp.
- [7] V. B. Kudryavtsev, E. E. Gasanov, A. S. Podkolzin, *Theory of Intelligent Systems: In 4 vol. Vol. 4. Automata Theory*, Moscow University Press, M, 2026 (in Russian), 305 pp.
- [8] G. V. Kalachev, E. E. Titova, “On the measure of the set of laws of motion of a point realized by cellular automata”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **22**:3 (2018), 105–125 (in Russian).
- [9] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (in Russian).
- [10] F. R. Moore, G. G. Langdon, “A generalized firing squad problem”, *Information and Control*, **12**:3 (1968), 212–220.

- [11] E. E. Titova, “Construction of moving images using cellular automata”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **18**:1 (2014), 153–180 (in Russian).
- [12] D. I. Vasilev, “Finding the nearest neighbor on a line using a cellular automaton with locators”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:3 (2020), 99–119 (in Russian).
- [13] D. I. Vasilev, E. E. Gasanov, “A Lower Bound on Complexity of a Locator Cellular Automaton Solution for the Closest Neighbor Search Problem”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **78**:5 (2023), 244–252. DOI: 10.3103/S0027132223050078 (in Russian).
- [14] G. V. Kalachev, “Notes on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:3 (2020), 47–56 (in Russian).
- [15] D. E. Ibragimova, “Vector addition on a line using a cellular automaton with locators”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **26**:4 (2022), 134–162 (in Russian).
- [16] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Issue 21, FIZMATLIT, M, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (in Russian).

Received on May 16, 2026